Peubah Acak Diskret

Minggu ke-4

Disusun oleh Tim Dosen MK Teori Peluang

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

Learning Objectives

Setelah mempelajari bagian ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut:

- **Menentukan nilai peluang dari fungsi peluang**
- **Menentukan peluang dari fungsi distribusi kumulatif, menentukan Fungsi Distribusi dari fungsi probabilitas, dan sebaliknya.**
- **Menentukan mean dan variansi untuk variabel acak diskrit.**
- **Mengerti asumsi-asumsi pada setiap variabel acak diskrit yang dipelajari.**

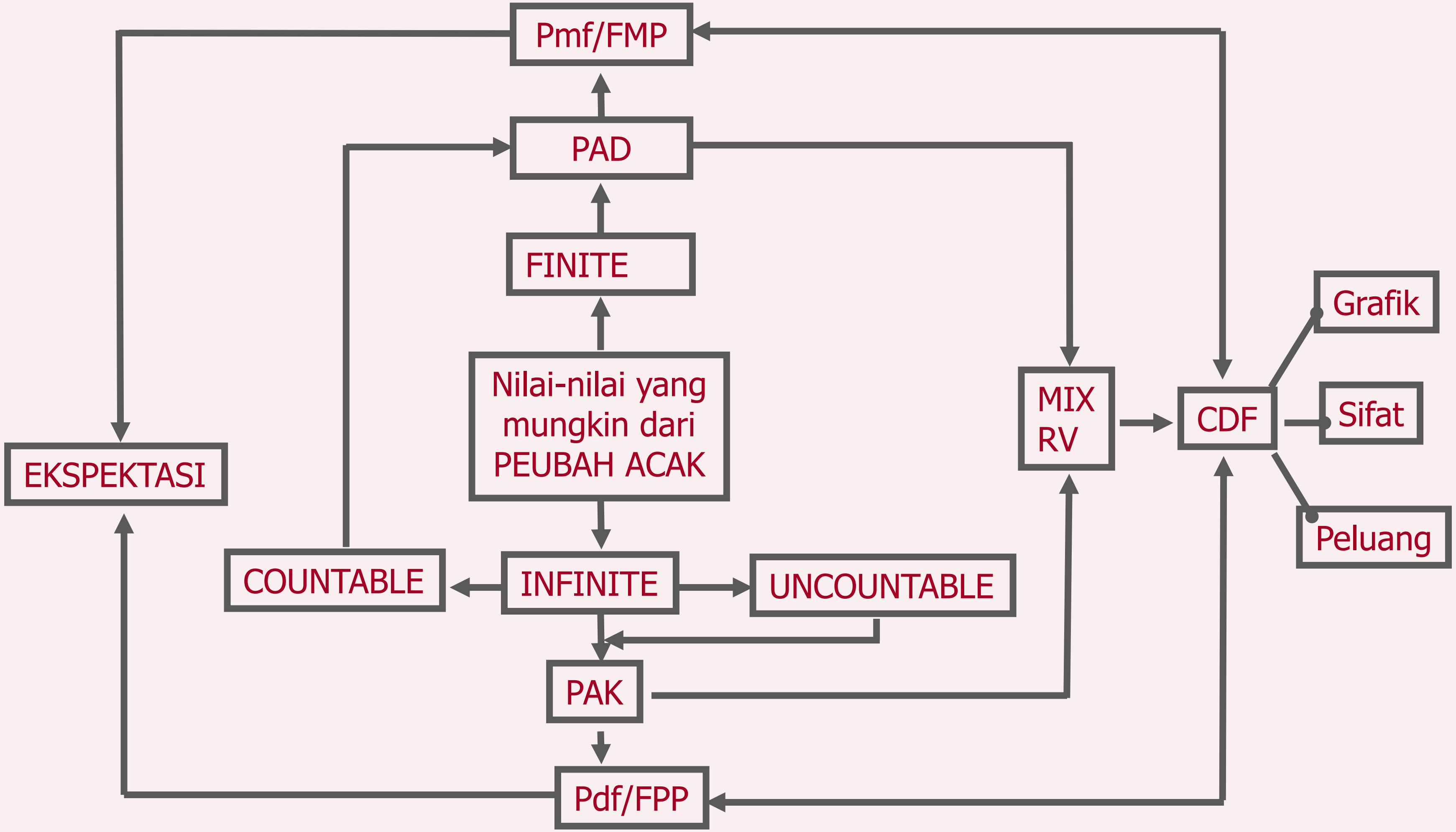
Materi :

- Definisi Peubah Acak Univariat
- Fungsi Massa Peluang dan Fungsi Distribusi
- Nilai Ekspektasi (Mean), dan Variansi

Peubah Acak Univariat

Pembahasan :

- Definisi
- Fungsi Peluang dan Fungsi Distribusi
- Ekspektasi dan Variansi
- Bivariate



Pengenalan & Klasifikasi Peubah Acak

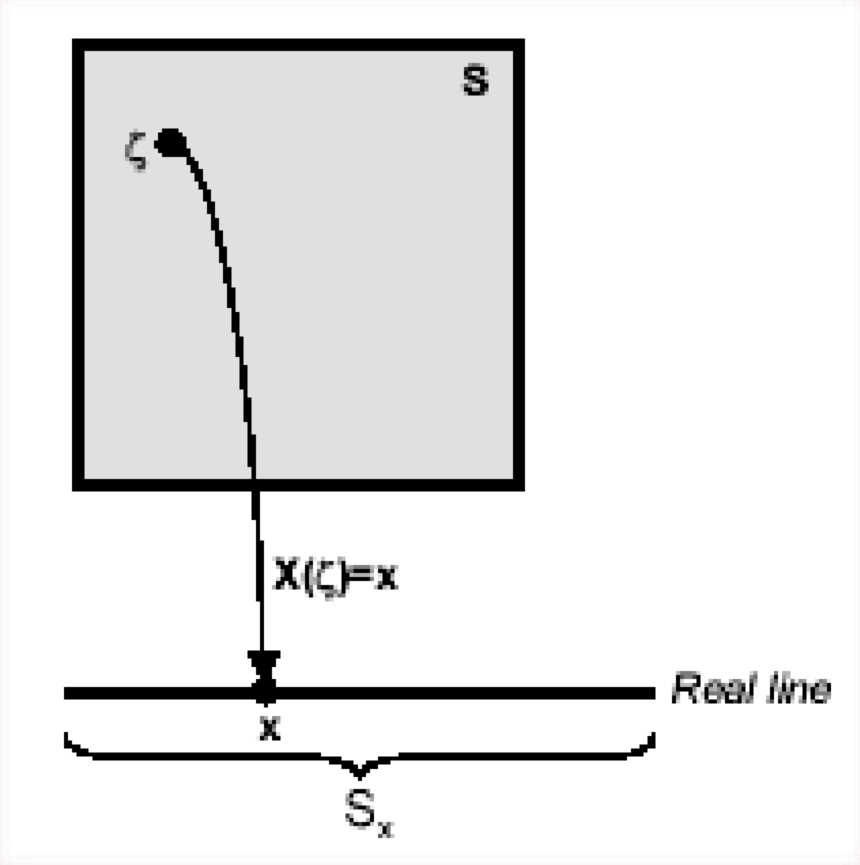
Dalam banyak eksperimen, kita ingin memadankan nilai numerik pada setiap keluaran yang mungkin untuk memungkinkan analisa matematis dari eksperimen tersebut.

Untuk tujuan ini, diperkenalkan **variabel acak**.

Definisi.
Suatu variabel acak adalah fungsi dari ruang sampel dari suatu eksperimen ke himpunan bilangan real. D.P.L, variabel acak memadankan suatu bilangan real tertentu pada setiap keluaran yang mungkin.

Catatan.

- Variabel acak adalah fungsi, bukan variabel.
- Variabel acak tidak dilakukan secara acak, tetapi memetakan hasil eksperimen yang acak ke bilangan real secara terdefinisi dengan baik.



Definisi

Jika E adalah suatu eksperimen yang mempunyai Ruang Contoh S, dan X adalah suatu fungsi yang memadankan bilangan real $X_{(e)}$ pada tiap outcome dari S, maka X disebut **peubah acak**, sedangkan range spacenya, Rx subset dari gugus bilangan real.

RE : MENGUNCALKAN KOIN, TIGA KALI

S = { TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH }

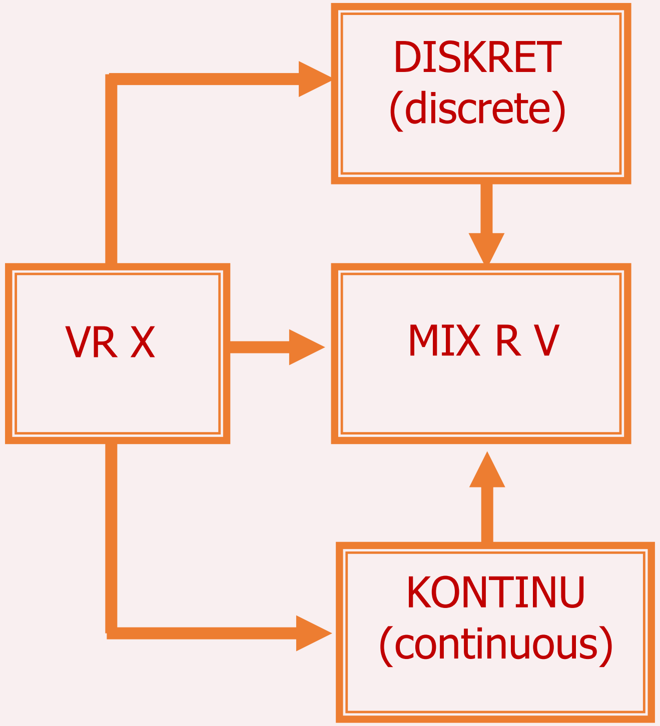
- Peubah X yang mencacah banyaknya " heads (H)" dalam RE seperti kondisi diatas :

  X (TTT) = 0 X (THT) = 1 X (HHT) = 2

  X (THH) = 2 X (TTH) = 1 X (HTT) = 1

  X (HTH) = 2 X (HHH) = 3
- Nilai fungsi disetiap sample point dinyatakan dengan lambang X(e)
- Himpunan nilai-nilai { X(e) : e $\in$ S} disebut range/range space, diberi lambang RX pada contoh diatas RX = { 0, 1, 2, 3 }
- Ini menunjukan salah satu dari contoh PAD. Dinamakan PAD, karena RX mengambil harga-harga bilangan bulat.

KLASIFIKASI PEUBAH ACAK



JIKA RANGE/RS
FINITE ATAU
COUNTABLE

JIKA RANGE/RS
UNCOUNTABLE

DEFINISI

- Jika S adalah ruang contoh dari suatu RE dan satu peubah acak X dengan daerah hasil R_X terdefinisi pada S. Selanjutnya jika kejadian A adalah suatu kejadian dalam S, dan B adalah kejadian dalam R_X, maka A dan B adalah kejadian yang ekivalen jika :

$$\boxed{A = \{e \in S : X_{(e)} \in B\}}$$

- Jika A adalah kejadian dalam S, dan B adalah kejadian dalam RX dari peubah acak X, maka peluang B didefinisikan :

PX(B) = P(A) dimana $\boxed{A = \{e \in S : X_{(e)} \in B\}}$

Fungsi Peluang (pmf)

Definisi :

Jika X adalah p.a.d., suatu nilai $P_x(x_i)$= P(X=x_i) dimana x_i adalah outcome dalam R_x utk i=1, 2, 3, …, n.
pX(x_i) harus memenuhi :

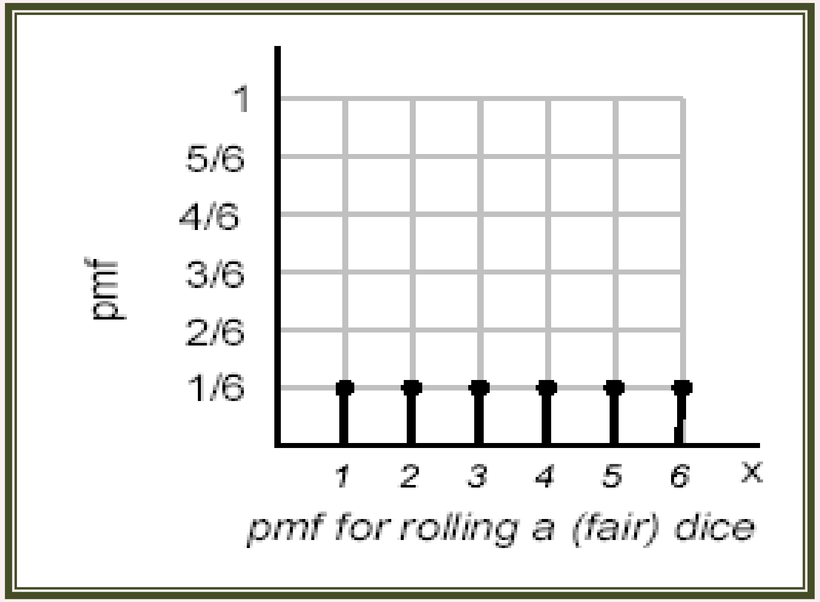
$$(i)\ p_X(x) \geq 0$$

$$(ii)\ \sum_{x \in R_X} p_X(x_i) = 1$$

Fungsi $p_X(x)$ disebut fungsi massa peluang (fmp) / probability mass function (pmf) f.m.p :

$p_X(x_i) = P(X=x_i)$, $x_i \in R_X$

$p_X(x_i) = 0$, $x_i \notin R_X$



Kumpulan pasangan

$[(x_i, p_X(x_i)), i=1, 2, 3, \ldots, n]$

disebut distribusi peluang dari X

Fungsi distribusi kumulatif (cdf)

- Fungsi distribusi kumulatif (cdf) $F_X(x)$ dari peubah acak X didefinisikan sebagai peluang

  dari kejadian $\{X \le x\}$ atau $P(X \le x)$

  $$F_X(x) = P(X \le x) \text{ untuk } -\infty < X < +\infty$$

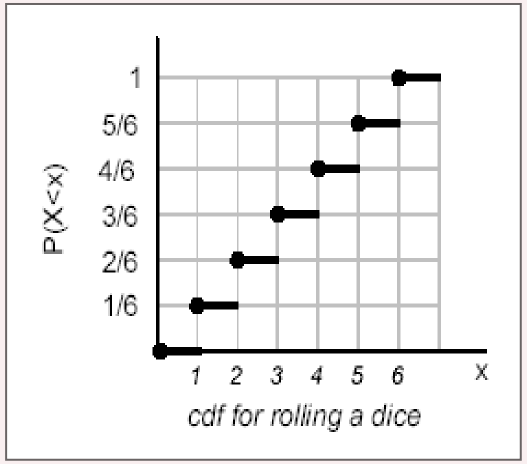
Kasus Diskret :

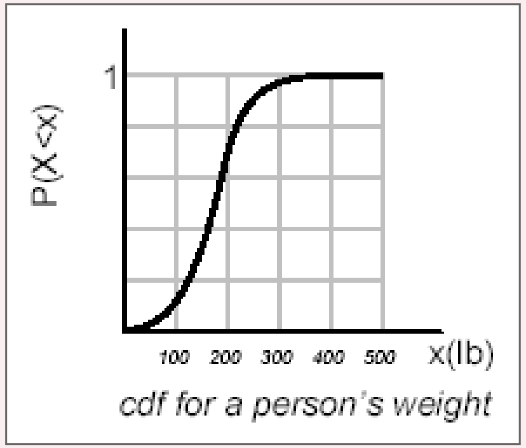
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x)$$

Kasus Kontinu :

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)d(x)$$





Fungsi distribusi kumulatif (cdf)

Sifat sifat cdf

$$0 \le F_X(x) \le 1$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$F_X(a) \le F_X(b) \text{ if } a \le b$$

$$F_X(b) = \lim_{h \to 0} F_X(b+h) = F_X(b^+)$$

Contoh soal PAD

1. Dalam sebuah kotak terdapat 6 kapasitor, 4 diantaranya bernilai 0,1µF dan sisanya bernilai 1 µF. Dari kotak tersebut diambil 2 kapasitor secara acak. Jika peubah acak X menyatakan banyaknya kapasitor yang bernilai 1µF yang terambil , maka tentukan :
    a. Daerah hasilnya.
    b. Fungsi massa peluang bagi X
    c. Fungsi distribusi X

Contoh soal PAD

Jawab :

6 kapasitor : 4 buah 0.1µF, 2 buah 1µF ➔ diambil 2 kapasitor

X = banyak kapasitor 1µF terambil

a. Daerah hasil, $R_X = \{0, 1, 2\}$

b. Fungsi massa peluang :

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{2}{x}\binom{4}{2-x}}{\binom{6}{2}} & ; x = 0, 1, 2 \\ 0 & ; x \ \ lainnya \end{cases}$$

atau

x	0	1	2
$p(x)$	6/15	8/15	1/15

c. Fungsi distribusi :

x	0	1	2
$p(x)$	6/15	8/15	1/15
$F(x)$	6/15	14/15	1

Contoh soal PAD

2. Dari sebuah kotak yang berisi 4 uang logam bernilai Rp.100 dan 2 uang logam bernilai Rp.50, akan diambil 3 uang logam sekaligus secara acak. Apabila T menyatakan jumlah (total) nilai dari 3 uang logam yang terambil, maka tentukan :
    a. Daerah hasil untuk T
    b. Fungsi massa peluang untuk T
    c. Fungsi distribusi untuk T

Contoh soal PAD

3. Suatu pengiriman 7 pesawat TV yang berisi 2 TV cacat. Sebuah hotel membeli 3 TV secara acak dari kelompok tadi. Bila peubah acak X menyatakan banyak pesawat TV yang rusak yang dibeli hotel tersebut, maka tentukan :
   a. Daerah hasil untuk X
   b. Fungsi massa peluang bagi X, dan gambarkan grafiknya
   c. Fungsi distribusi bagi X, dan gambarkan grafiknya

Mean

Notasi : $\mu = E(X)$

- Lambang E disebut operator ***Ekspektasi***
- Beberapa istilah ekspektasi : mean/rataan, nilai harapan matematika

$$\boxed{E(X) = \sum x\, p(x)}$$

- Sifat :
  1. E(k) = k
  2. E(kX) = k E(X) ; dengan k adalah konstanta
  3. E(a +bX) = a + b E(X) ; ; dengan a dan b adalah konstanta

Variansi

Notasi : $Var(X)$ atau σ_X^2

$$\boxed{\begin{aligned} Var(X) &= \sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] \\ &= \sum (X-\mu_X)^2\ p(x) = E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned}}$$

- Sifat :

1. Var(k) = 0
2. Var(kX) = k^2 Var(X) ; dengan k adalah konstanta
3. Var(a + bX) = b^2 Var(X) ; dengan a dan b adalah konstanta

Contoh soal

1. X adalah peubah acak dengan $E[(X-1)^2] = 10$, dan $E[(X-2)^2] = 6$, hitunglah μ dan σ^2

<u>Jawab :</u>

$E[(X-1)^2] = 10$ $\rightarrow$ $E[X^2 - 2X + 1] = E(X^2) - 2E(X) + 1 = 10$

$E(X^2) - 2E(X) = 9$ ...(1)

$E[(X-2)^2] = 6$ $\rightarrow$ $E[X^2 - 4X + 4] = E(X^2) - 4E(X) + 4 = 6$

$E(X^2) - 4E(X) = 2$ ...(2)

(1) & (2) :

$$\begin{array}{r} E(X^2) - 2E(X) = 9 \\ E(X^2) - 4E(X) = 2 \\ \hline 2E(X) = 7 \end{array} \; -$$

$\rightarrow$ $E(X) = \mu = 7/2$

Contoh soal

$E(X^2) - 2E(X) = 9$ ...(1)

$E(X) = \mu = 7/2$ ➔ $E(X^2) = 2E(X) + 9 = 2(7/2) + 9 = 16$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 16 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 16 - \frac{49}{4} = \frac{15}{4}$$

Contoh soal

2. Diketahui X adalah peubah acak diskret dengan fungsi peluang :

x	0	1	2
$p(x)$	6/15	8/15	1/15

Tentukan : E(2X – 2) dan Var(3X)

Jawab :

$$E(X) = \Sigma x\, p(x) = 0\left(\frac{6}{15}\right) + 1\left(\frac{8}{15}\right) + 2\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \Sigma x^2\, p(x) = 0^2\left(\frac{6}{15}\right) + 1^2\left(\frac{8}{15}\right) + 2^2\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$$

$$E(2X-2) = 2E(X) - 2 = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$Var(3X) = 9\,Var(X) = 9\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{3}$$

Contoh soal PAK

1. Peubah acak (variabel random) X mempunyai fungsi padat peluang (p.d.f.) :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & ;\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ;\ untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Tentukan :

a. E(X) dan Var(X)

E(X) $= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\, dx = \int_0^1 x\ 2x\ dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Contoh soal PAK

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\ 2x\ dx = \int_{0}^{1} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^2\ 2x\ dx = \int_{0}^{1} 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4 \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Soal latihan

1. Sebuah tas berisi 10 buah USB yang terdiri dari 4 USB yang isinya tentang pemrograman dan 6 USB yang isinya tentang manajemen bisnis. Seseorang mengambil 3 USB secara acak dari tas tsb. Jika variable random X didefiniskan sebagai banyaknya USB yang isinya tentang pemrograman, maka tentukan :
   a. $P(1 < X \leq 3)$
   b. Fungsi Distribusinya
   c. $Var(2X+3)$

2. Di sebuah lantai produksi dilakukan inspeksi terhadap produk yang cacat. Pemeriksaan dilakukan dengan mengambil sampel secara acak 5 buah produk di lantai produksi. Jika variable random X didefiniskan sebagai banyaknya produk yang cacat, maka tentukan :
   a. $P(1 \leq X \leq 4)$
   b. Fungsi Distribusinya
   c. $E(2X+3)$

Soal

1. Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fmp :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 0,1 \\ \frac{1}{8} & , x = 2,4 \\ k & , x = 5 \\ 0 & , x\, lainnya \end{cases}$$

a. Hitung nilai k
b. Tentukan F(x)
c. Hitung nilai :
   i. $P(1<X\leq 5)$
   ii. $P(1 \leq X \leq 5)$
   iii. $P(1 \leq X<5)$
   iv. $P(1<X<5)$
d. E(X) dan Var(X)

2. Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fmp :

$$p(x) = \begin{cases} c(6-x) & , x = -2,-1,0,1,2 \\ 0 & , x\, lainnya \end{cases}$$

a. Hitung nilai c
b. Tentukan F(x), dan gambarkan grafiknya
c. Hitung nilai : $P(X>1)$, $P(1<X\leq 5)$, $P(1 \leq X \leq 5)$, $P(1 \leq X<5)$, $P(1<X<5)$
d. Hitung : $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^2 - 5)$, dan $Var(2X)$

Soal

3. Diketahui Fungsi Distribusi peubah acak diskret X adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -2 \\ \dfrac{1}{2} & , -2 \le x < 2 \\ \dfrac{3}{5} & , 2 \le x < 4 \\ \dfrac{8}{9} & , 4 \le x < 6 \\ 1 & , x \ge 6 \end{cases}$$

Hitunglah :

a. Fungsi massa peluang bagi X
b. Nilai P(X>2)
c. Nilai P(2 ≤X<6), P(2<X ≤6), P(2 ≤ X ≤6), P(2<X<6)
d. E(X), dan E(3X – 2)

4. Diketahui Fungsi Distribusi peubah acak diskret X adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ 0{,}2 & , -1 \le x < 0 \\ 0{,}5 & , 0 \le x < 1 \\ 0{,}8 & , 1 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

Hitunglah :

a. Fungsi massa peluang bagi X
b. Nilai P(X>1)
c. Nilai P(0 ≤X<3), P(0<X ≤3), P(0 ≤ X ≤3), P(0<X<3)
d. E(X), dan Var(X)

5. Misal X adalah peubah acak diskret yang menyatakan jumlah barang cacat dalam suatu proses produksi dengan fungsi massa peluang :

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p(x)	0.41	0.37	0.16	5k	k

Tentukan :

a. Nilai k

b. Fungsi distribusinya, kemudian gambarkan grafiknya

c. $P(1 < X \leq 3)$

d. E(X), dan Var(X)

e. Var(2X – 1)